Estensione del metodo dei tableaux a una logica parziale.

Sia dato un linguaggio $\mathcal{L}$ del primo ordine così costituito:

simboli logici: $*, \bot, \top, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$

un insieme numerabile di variabili individuali (Var)

simboli descrittivi: un insieme di lettere predicative ($\mathcal{P}$)

Un **modello** per $\mathcal{L}$ è una struttura **M** composta da:

(a) un insieme non vuoto D[1]

(b) per ogni $P \in \mathcal{P}$, una funzione **parziale** P_M: $D^{\lambda(P)} \rightarrow \{\bot, *, \top\}$

(la funzione λ: $\mathcal{P} \rightarrow \omega - \{0\}$ ci dà, per ogni $P \in \mathcal{P}$, la *arietà* di P)

La definizione di formula ben-formata è quella consueta, considerando '$\bot$', '*', '$\top$' formule atomiche. (Si noti che $\mathcal{L}$ potrebbe essere ridotto ricorrendo a un insieme più piccolo di simboli logici, visto che valgono le note definizioni: $\varphi \rightarrow \psi =_{def} \neg\varphi \vee \psi$, $\exists x \varphi =_{def} \neg \forall x \neg \varphi$, etc.)

Come di consueto, un'assegnazione è una funzione **s**: Var$\rightarrow$D. Se **s** è un'assegnazione, sia $\mathbf{s}[a/x]$ l'assegnazione tale che $\mathbf{s}[a/x](x) = a$ e $\mathbf{s}[a/x](y) = \mathbf{s}(y)$, se x e y sono variabili distinte (dove $a \in D$).

VERITÀ, VALIDITÀ

Se **M** è un modello per $\mathcal{L}$, **s** un'assegnazione e φ una formula, con $\mathbf{M}_s(\varphi)$ esprimiamo il valore di φ in **M** rispetto a **s**. Definiamo allora:

$\mathbf{M}_s(\top) = \top$, $\mathbf{M}_s(\bot) = \bot$, $\mathbf{M}_s(*) = *$

$\mathbf{M}_s(Pt_1,\ldots,t_{\lambda(P)}) = \top$ sse $P_M(<s(t_1),\ldots, s(t_{\lambda(P)})>) = \top$

$\mathbf{M}_s(Pt_1,\ldots,t_{\lambda(P)}) = \bot$ sse $P_M(<s(t_1),\ldots, s(t_{\lambda(P)})>) = \bot$[2]

$\mathbf{M}_s(\neg\varphi) = \top$ sse $\mathbf{M}_s(\varphi) = \bot$

$\mathbf{M}_s(\neg\varphi) = \bot$ sse $\mathbf{M}_s(\varphi) = \top$

[1] La restrizione che D contenga almeno un elemento può essere lasciata cadere adottando regole di derivazione per tableaux appena modificate. Vedi il sistema di Hodges.

[2] Si ricordi che in $\mathcal{L}$ gli unici termini sono variabili individuali.

$\mathbf{M}_s(\varphi\wedge\psi) = \top$ sse $\mathbf{M}_s(\varphi) = \mathbf{M}_s(\psi)=\top$

$\mathbf{M}_s(\varphi\wedge\psi) = \bot$ sse $\mathbf{M}_s(\varphi) = \bot$ o $\mathbf{M}_s(\psi) = \bot$

$\mathbf{M}_s(\varphi\vee\psi) = \top$ sse $\mathbf{M}_s(\varphi) = \top$ o $\mathbf{M}_s(\psi) = \top$

$\mathbf{M}_s(\varphi\vee\psi) = \bot$ sse $\mathbf{M}_s(\varphi) = \mathbf{M}_s(\psi) = \bot$

$\mathbf{M}_s(\varphi\rightarrow\psi) = \top$ sse $\mathbf{M}_s(\varphi) = \bot$ o $\mathbf{M}_s(\psi) = \top$

$\mathbf{M}_s(\varphi\rightarrow\psi) = \bot$ sse $\mathbf{M}_s(\varphi) = \top$ e $\mathbf{M}_s(\psi) = \bot$

$\mathbf{M}_s(\forall x\varphi) = \top$ sse $\mathbf{M}_{s[a/x]}(\varphi) = \top$ per ogni $a \in D$

$\mathbf{M}_s(\forall x\varphi) = \bot$ sse $\mathbf{M}_{s[a/x]}(\varphi) = \bot$ per qualche $a \in D$

$\mathbf{M}_s(\exists x\varphi) = \top$ sse $\mathbf{M}_{s[a/x]}(\varphi) = \top$ per qualche $a \in D$

$\mathbf{M}_s(\exists x\varphi) = \bot$ sse $\mathbf{M}_{s[a/x]}(\varphi) = \bot$ per ogni $a \in D$

Per ogni formula φ, $\mathbf{M}_s(\varphi) = *$ se $\mathbf{M}_s(\varphi)$ non è né $\top$, né $\bot$.

Si noti che se dessimo la definizione classica di validità[3], allora nessuna formula risulterebbe valida (a parte, ovviamente, la formula '$\top$'). Per rendersi conto di ciò, si prenda una qualsiasi verità logica (classica) e si consideri un modello **M** che valuti $*$ tutte le formule atomiche che occorrono in quella verità logica (rispetto a una data assegnazione **s**). Per esempio, $\mathbf{M}_s(Px\vee\neg Px) = *$ se $\mathbf{s}(x) = a$ e $P_M(a) = *$.

D'altra parte, liberalizzando[4] la definizione classica, tutte e solo le formule classicamente valide risulterebbero valide in questa semantica, il che renderebbe poco interessante il ricorso a strutture di questo tipo.

Ricorreremo allora alla seguente definizione (dove Γ è un insieme qualsiasi di formule di $\mathcal{L}$, φ è una formula di $\mathcal{L}$, e '$\Gamma \vDash \varphi$' può essere letto 'φ è conseguenza di Γ'):

(DEF) Sia $\Gamma = \{\psi_1,\ldots,\psi_n, \ldots\}$ e si consideri l'ordine lineare $<$ su $\{\bot, *, \top\}$ tale che $\bot < * < \top$.

Allora:

$\Gamma \vDash \varphi$ sse $\mathrm{Min}(\top, \mathbf{M}_s(\psi_1), \ldots, \mathbf{M}_s(\psi_n), \ldots) \leq \mathbf{M}_s(\varphi)$ per ogni modello **M** e per ogni assegnazione **s** in **M**

Una definizione equivalente è questa (con Γ insieme qualsiasi di formule):

[3] Cioè: φ è valida sse per ogni modello **M** e ogni assegnazione **s** in **M**, $\mathbf{M}_s(\varphi) = \top$.

[4] Cioè: φ è valida sse per ogni modello **M** e ogni assegnazione **s** in **M**, $\mathbf{M}_s(\varphi) = \top$ o $\mathbf{M}_s(\varphi) = *$.

$$\Gamma \vDash \varphi \text{ sse } \begin{cases} \text{per ogni } \psi\in\Gamma, \mathbf{M}_s(\psi) = \top \Rightarrow \mathbf{M}_s(\varphi) = \top \\ \\ \text{per ogni } \psi\in\Gamma, \mathbf{M}_s(\psi) \neq \bot \Rightarrow \mathbf{M}_s(\varphi) \neq \bot \end{cases} \quad \text{per ogni } \mathbf{M} \text{ e per ogni } \mathbf{s} \text{ in } \mathbf{M}$$

Questa definizione, cui faremo riferimento d'ora in poi, evidenzia il fatto che la nozione di conseguenza logica usata qui si compone di due nozioni possibili, più deboli, di conseguenza: quella che corrisponde alla prima condizione (e che potremmo designare con '$\vDash^\top$') e quella che corrisponde alla seconda (e che potremmo designare con '$\vDash^\bot$'). Nel caso classico (dove, per ogni formula φ, ogni modello **M**, e ogni assegnazione **s** in **M**, si ha che $\mathbf{M}_s(\varphi)=\top$ o $\mathbf{M}_s(\varphi)=\bot$) $\vDash^\top$ e $\vDash^\bot$ vengono a coincidere, ma nel caso presente sono da tenere distinte. Si consideri per esempio quanto segue:

$\varphi \vDash^\bot Px\lor\neg Px$, per qualsiasi formula φ, ma non: $\varphi \vDash^\top Px\lor\neg Px$

$Px\land\neg Px \vDash^\top \varphi$, per qualsiasi formula φ, ma non: $Px\land\neg Px \vDash^\bot \varphi$

Possiamo allora dire che:

$\Gamma \vDash \varphi$ sse $\Gamma \vDash^\top \varphi$ e $\Gamma \vDash^\bot \varphi$ (o anche: $\vDash\, = \,\vDash^\top \cap \vDash^\bot$)

Vedremo fra poco come il nostro metodo di costruzione dei tableaux rispetti questo modo di "comporre" in un'unica nozione di conseguenza due nozioni più deboli.

TABLEAUX

Nella costruzione dei nostri tableaux non useremo semplici formule di $\mathcal{L}$, bensì formule **segnate**. L'insieme dei segni è S = {V, F, I, N}. Una formula segnata è una formula di $\mathcal{L}$ preceduta da uno dei segni in S. Per esempio: $V(Px)$, $N(\forall x[Px\rightarrow Qy])$, $F(*)$, $I(\bot)$, sono tutte formule segnate. Il significato intuitivo dei segni appena introdotti è indicato qui di seguito (dove φ è una formula di $\mathcal{L}$):

$V(\varphi) = \varphi$ è vera

$F(\varphi) = \varphi$ è falsa

$I(\varphi) = \varphi$ è indefinita

$N(\varphi) = \varphi$ non è falsa

Per **alberi** intendiamo qui alberi ordinati triadici[5]. Ora, un **tableau** non è altro che un albero i cui nodi sono insiemi di occorrenze di formule segnate. Più precisamente, definiamo nel modo seguente la nozione di **tableau per Δ**, dove Δ è un insieme di occorrenze di formule segnate:

(DEF) Dati due tableaux T′ e T″, chiamiamo T″ **estensione diretta** di T′ se T″ può essere ottenuto da T′ per applicazione di una delle regole di deduzione specificate in **(I)** e **(II)**. Il tableau T è un **tableau per Δ** sse esiste una sequenza finita $<T_1, \ldots, T_n=T>$ tale che T_1 è il tableau il cui unico nodo è Δ, e tale che per ogni $k < n$, T_{k+1} è un'estensione diretta di T_k.

(I) REGOLE DI DEDUZIONE (PRIMITIVE)

LOGICA CLASSICA

$$\frac{V(\neg\varphi)}{F(\varphi)} \qquad \frac{F(\neg\varphi)}{V(\varphi)} \qquad \frac{V(\varphi\vee\psi)}{V(\varphi) \;\mid\; V(\psi)} \qquad \frac{F(\varphi\vee\psi)}{\begin{array}{c}F(\varphi)\\ F(\psi)\end{array}}$$

$$\frac{V(\forall x\varphi)}{V(\varphi^{y/x})} \qquad \frac{F(\forall x\varphi)}{F(\varphi^{y/x})}$$ (dove y è una qualsiasi variabile che non occorre libera in nessuna formula nel ramo)

LOGICA PARZIALE

$$\frac{N(\varphi)}{V(\varphi) \;\mid\; I(\varphi)} \qquad \frac{I(\neg\varphi)}{I(\varphi)} \qquad \frac{I(\varphi\vee\psi)}{\begin{array}{c}I(\varphi)\\ F(\psi)\end{array} \;\Big|\; \begin{array}{c}I(\psi)\\ F(\varphi)\end{array} \;\Big|\; \begin{array}{c}I(\varphi)\\ I(\psi)\end{array}} \qquad \frac{I(\forall x\varphi)}{V(\varphi^{y/x}) \;\mid\; I(\varphi^{y/x})}$$

(II) REGOLE DERIVATE

$$\frac{V(\varphi\wedge\psi)}{\begin{array}{c}V(\varphi)\\ V(\psi)\end{array}} \qquad \frac{F(\varphi\wedge\psi)}{F(\varphi) \;\mid\; F(\psi)} \qquad \frac{V(\varphi\to\psi)}{F(\varphi) \;\mid\; V(\psi)} \qquad \frac{F(\varphi\to\psi)}{\begin{array}{c}V(\varphi)\\ F(\psi)\end{array}}$$

$$\frac{V(\exists x\varphi)}{V(\varphi^{y/x})}$$ (con restrizione su y)

$$\frac{F(\exists x\varphi)}{F(\varphi^{y/x})} \qquad \frac{I(\varphi\wedge\psi)}{\begin{array}{c}I(\varphi)\\ V(\psi)\end{array} \;\Big|\; \begin{array}{c}I(\psi)\\ V(\varphi)\end{array} \;\Big|\; \begin{array}{c}I(\varphi)\\ I(\psi)\end{array}}$$

[5] Alberi, cioè, i cui nodi hanno al massimo tre successori. Ma a questo requisito si deve rinunciare qualora si introduca nel linguaggio il connettivo ↔ (definito nel modo consueto) con relativa regola derivata, atta a semplificare la costruzione dei tableaux.

$$\begin{array}{ccc} & I(\varphi\to\psi) & \\ V(\varphi) & F(\psi) & I(\varphi) \\ I(\psi) & I(\varphi) & I(\psi) \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{I(\exists x\varphi)} \\ F(\varphi^{y/x}) & I(\varphi^{y/x}) \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{N(\neg\varphi)} \\ F(\varphi) & I(\varphi) \end{array}$$

(In **(I)** e **(II)**, un qualsiasi nodo {A, B}, dove A e B sono formule segnate e A ≠ B, è rappresentato collocando i due enunciati uno sopra l'altro. Un nodo {A} è rappresentato semplicemente come A.)

Si noti che l'unica regola primitiva che interessa il segno 'N' riguarda formule φ qualsiasi. Come vedremo, quella regola ci servirà per avviare la costruzione dei tableaux: si applicherà cioè a formule prefissate da 'N' che stanno solo nel nodo iniziale.

Diciamo che un **ramo** di un tableau è **chiuso** se c'è una formula φ tale che sia $s(\varphi)$ che $s'(\varphi)$ stanno in quel ramo, dove s e s′ sono segni distinti nell'insieme {V, F, I}. Un ramo, inoltre, è chiuso se contiene una di queste formule **critiche**: $F(\top)$, $V(\bot)$, $F(*)$, $V(*)$, $I(\bot)$, $I(\top)$. Infine, diciamo che un **tableau** è **chiuso** se contiene solo rami chiusi.

Come è noto, i tableaux rappresentano una procedura per dimostrare l'inconsistenza di un insieme di formule (segnate, nel nostro caso). Nel caso classico (dove vige la bivalenza), per dimostrare $\Gamma \vDash^{C} \varphi$ (dove φ e le formule in Γ sono formule del linguaggio del primo ordine, cioè non segnate) è possibile ragionare nel modo seguente. Assumendo che Γ sia finito, e che $\psi_1,\ldots,\psi_n$ siano tutte e solo le formule di Γ, si considera l'insieme di formule segnate $\Delta = \{V(\psi_1),\ldots,V(\psi_n), F(\varphi)\}$. Sviluppare per estensioni progressive, in base alle regole date, dei tableaux per Δ, significa verificare via via cosa comporta assumere la verità delle premesse $\psi_1,\ldots,\psi_n$ e la falsità di φ. Se a un certo punto della costruzione si ottiene un tableau chiuso, si è dimostrato che la verità di tutte le premesse e la falsità della conclusione sono inconsistenti, perché tutte le alternative ipotizzate (i rami del tableau) comportano una contraddizione (cioè la compresenza di $V(\chi)$ e $F(\chi)$, per qualche formula χ). Si è quindi dimostrato, indirettamente, $\Gamma \vDash^{C} \varphi$ (nel senso classico).

Esempio:

$Px \vDash^{C} Qx\to\neg\neg Px$ vale perché c'è un tableau per $\Delta = \{V(Px), F(Qx\to\neg\neg Px)\}$ che chiude.

$$
\begin{array}{c}
V(Px) \\
F(Qx \rightarrow \neg\neg Px) \\
| \\
V(Qx) \\
| \\
F(\neg\neg Px) \\
| \\
V(\neg Px) \\
| \\
F(Px) \\
| \\
X
\end{array}
$$

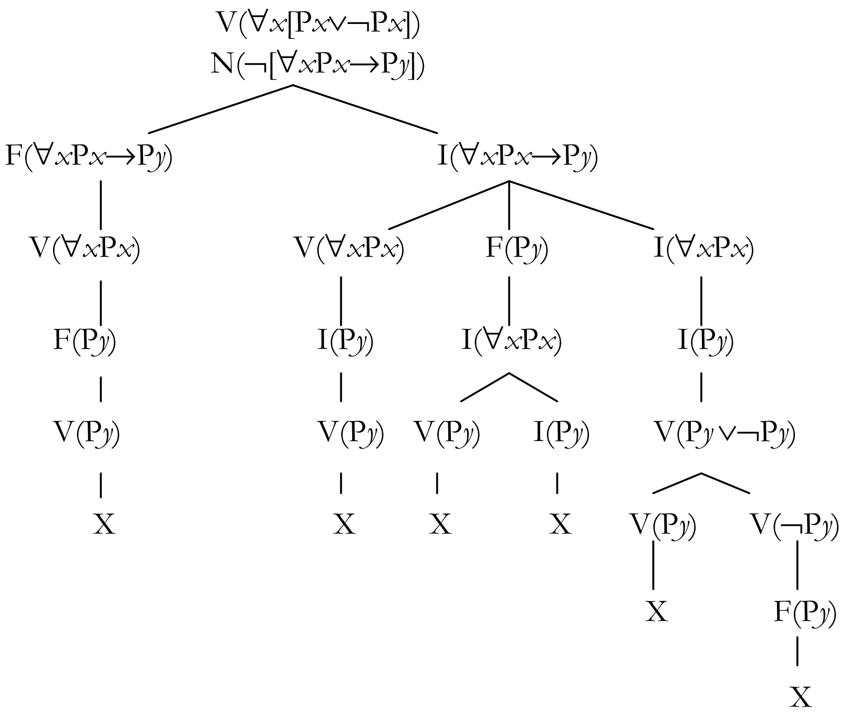
Purtroppo, però, nel nostro caso la nozione di conseguenza logica pertinente è più complicata (come abbiamo visto, essa si compone di due nozioni più deboli, che abbiamo rappresentato con $\vDash^{\top}$ e $\vDash^{\perp}$ rispettivamente). Ma possiamo ragionare in questo modo. Supponiamo ancora che $\Gamma = \{\psi_1,\ldots,\psi_n\}$. Allora dimostreremo $\Gamma \vDash \varphi$ se dimostreremo sia $\Gamma \vDash^{\top} \varphi$ sia $\Gamma \vDash^{\perp} \varphi$. In termini di tableaux, ciò significa trovare un tableau chiuso per $\{V(\psi_1),\ldots,V(\psi_n), N(\neg\varphi)\}$ e un tableau chiuso per $\{N(\psi_1),\ldots,N(\psi_n), F(\varphi)\}$. Vogliamo infatti escludere, contemporaneamente, che tutte le premesse ψ_i siano vere e la conclusione φ non vera[6], e che tutte le premesse ψ_i siano non-false e la conclusione φ falsa. Se trovassimo un tableau che chiude per $\{V(\psi_1),\ldots,V(\psi_n), N(\neg\varphi)\}$ e uno che chiude per $\{N(\psi_1),\ldots,N(\psi_n), F(\varphi)\}$, entrambe le ipotesi sarebbero escluse. Avremmo cioè dimostrato sia $\Gamma \vDash^{\top} \varphi$, sia $\Gamma \vDash^{\perp} \varphi$, e quindi $\Gamma \vDash \varphi$.

Esempio:

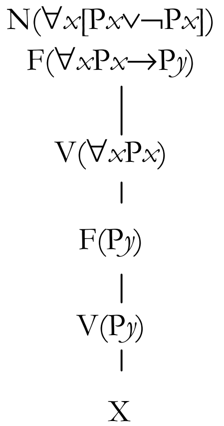
$\forall x(Px \vee \neg Px) \vDash \forall x Px \rightarrow Py$

1. Tableau per $\{V(\forall x[Px \vee \neg Px]), N(\neg[\forall x Px \rightarrow Py])\}$ (verifica $\vDash^{\top}$)

[6] Si noti che ‘$N(\neg\varphi)$’ significa che ‘$\neg\varphi$’ è vera o indefinita, e quindi che φ è falsa o indefinita (vedi la relativa regola derivata).



2. Tableau per {N(∀x[Px∨¬Px]), F(∀xPx→Py)} (verifica $\models^{\perp}$)



Si noti che, da sola, '∀xPx→Py' (che è classicamente valida) non è valida, cioè $\not\models$ ∀xPx→Py; in particolare: $\not\models^{\top}$ ∀xPx→Py. Con il metodo dei tableaux, nell'esempio precedente, abbiamo dimostrato che '∀xPx→Py' è asseribile tutte le volte che lo è '∀x(Px∨¬Px)', cioè tutte le volte che P è un predicato 'totale'.

Esercizio. Facendo l'opportuno tableau, si dimostri $\models^{\perp}$ ∀xPx→Py, cioè che '∀xPx→Py' è valida in una delle due accezioni più deboli. (Potremmo anche dire: '∀xPx→Py' non è valida – nel senso di incondizionatamente asseribile –, ma è comunque non falsificabile.)

Passando alla sintassi, i tableaux possono essere considerati come una procedura di derivazione di formule (segnate) da insiemi **finiti** di formule (segnate). Nondimeno, è agevole trasferire al caso delle formule di $\mathcal{L}$ (cioè le formule non segnate) questa nozione di derivabilità. La definizione pertinente è questa (dove φ e le formule di $\Gamma=\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}$ sono formule del linguaggio del primo ordine $\mathcal{L}$):

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{sse} \quad \begin{cases} \text{c'è un tableau chiuso per } \{V(\psi_1), \ldots, V(\psi_n), N(\neg\varphi)\} \\ \textbf{e} \\ \text{c'è un tableau chiuso per } \{N(\psi_1), \ldots, N(\psi_n), F(\varphi)\} \end{cases}$$

Si tratta adesso di dimostrare la **correttezza** del nostro sistema, cioè:

(°) $\Gamma \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \models \varphi$

e poi anche la sua **completezza**, e cioè:

(∞) $\Gamma \models \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi$

CORRETTEZZA

Cominciamo con un paio di definizioni. Sia Δ un insieme di formule segnate. Diciamo che Δ è **soddisfacibile** se ci sono un modello **M** e un'assegnazione **s** in **M** tali che:

$V(\varphi) \in \Delta \;\Rightarrow\; \mathbf{M}_s(\varphi) = \top$ $\qquad$ $F(\varphi) \in \Delta \;\Rightarrow\; \mathbf{M}_s(\varphi) = \bot$

$I(\varphi) \in \Delta \;\Rightarrow\; \mathbf{M}_s(\varphi) = *$ $\qquad$ $N(\varphi) \in \Delta \;\Rightarrow\; \mathbf{M}_s(\varphi) \neq \bot$

Diciamo che Δ è (sintatticamente) **consistente** se nessun tableau per Δ è chiuso (per Δ finito). Dimostreremo (°) attraverso la sua conversa:

$\Gamma \not\models \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \nvdash \varphi$

e cioè:

$\{V(\psi_1), \ldots, V(\psi_n), N(\neg\varphi)\}$ o $\{N(\psi_1), \ldots, N(\psi_n), F(\varphi)\}$ è soddisfacibile $\Rightarrow$ $\{V(\psi_1), \ldots, V(\psi_n), N(\neg\varphi)\}$ o $\{N(\psi_1), \ldots, N(\psi_n), F(\varphi)\}$ è consistente.

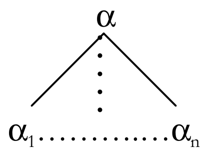
Naturalmente ciò risulterà dimostrato se dimostreremo che per un qualsiasi insieme finito Δ di formule segnate vale quanto segue:

(*) Δ è soddisfacibile $\;\Rightarrow\;$ Δ è consistente

Assumiamo dunque che Δ sia soddisfacibile. Cominciamo con l'osservare che il tableau Δ (cioè il tableau avente Δ come unico nodo) non è chiuso, altrimenti Δ dovrebbe contenere, per qualche formula φ di $\mathcal{L}$, sia $s(\varphi)$ sia $s'(\varphi)$ – dove $s, s' \in \{V, F, I\}$ e $s \neq s'$–, il che è impossibile[7]. Pertanto (*) risulterebbe dimostrato se si dimostrasse che, ogni volta che applico a un ramo soddisfacibile una delle regole date, ottengo almeno un'estensione di quel ramo che è soddisfacibile, e quindi non chiuso (infatti, un ramo soddisfacibile non può essere chiuso). Ciò garantirebbe che, a partire dal tableau iniziale Δ (che, come abbiamo appena osservato, non è chiuso) ottengo ogni volta un tableau per Δ con un ramo non chiuso. Si tratta quindi di dimostrare quanto segue:

(+) Se ρ è un ramo soddisfacibile e $\rho_1,\ldots, \rho_n$ $(1 \leq n \leq 3)$ sono stati ottenuti da ρ per applicazione di una delle regole date, allora ρ_i è soddisfacibile, per qualche i $(1 \leq i \leq n)$.

(Si ricordi che le nostre regole sono di tipo:



dove $1 \leq n \leq 3$ e dove, per ogni $i \leq n$, α_i è un insieme di formule segnate.)

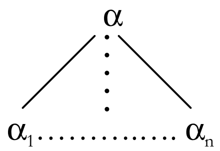
Il lettore può verificare che tutte le regole date hanno la caratteristica menzionata in (+).

COMPLETEZZA

Anche in questo caso dimostreremo (∞) attraverso la sua conversa, che, per le stesse considerazioni di prima, risulterà dimostrata se sarà dimostrato il seguente enunciato:

(**) Δ è consistente $\Rightarrow$ Δ è soddisfacibile (dove Δ è un insieme finito di formule segnate)

La dimostrazione di (**) è in tutto simile a quella per il caso classico, con le opportune modifiche. La prima di queste modifiche riguarda la nozione di **insieme analizzato** (per formule segnate). Abbiamo appena visto che le nostre regole sono di tipo:



dove $1 \leq n \leq 3$. Possiamo allora definire un insieme analizzato come un insieme di formule segnate Δ tale che:

(1) nessuna formula critica appartiene a Δ

[7] Oppure Δ dovrebbe contenere qualche formula critica, ciò che è pure impossibile per un insieme soddisfacibile.

(2) se φ è una formula atomica di $\mathcal{L}$, allora non si dà il caso che $s(\varphi)$ e $s'(\varphi)$ appartengano entrambe a Δ – con s e s′ elementi distinti in $\{V, F, I\}$

(3) se

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \alpha_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_n \end{array}$$

è una delle regole proposizionali date, e se una formula segnata di tipo α appartiene a Δ, allora Δ contiene le formule segnate in α_i, per qualche $i \leq n$

(4) se $V(\forall x\varphi) \in \Delta$, allora $V(\varphi^{y/x}) \in \Delta$ per ogni $y \in$ Var

se $F(\forall x\varphi) \in \Delta$, allora $F(\varphi^{y/x}) \in \Delta$ per qualche $y \in$ Var

se $I(\forall x\varphi) \in \Delta$, allora, per ogni $y \in$ Var, $V(\varphi^{y/x}) \in \Delta$ oppure $I(\varphi^{y/x}) \in \Delta$

Una volta definiti così gli insiemi analizzati, è possibile dimostrare quanto segue:

(HS) Se Δ è un insieme analizzato, allora Δ è soddisfacibile.

Si consideri infatti il modello **M*** (che sfrutta la possibilità di interpretare parzialmente i predicati di $\mathcal{L}$):

(i) il dominio di **M*** è Var

(ii) per ogni $P \in \mathcal{P}$, $P_{M^*}(<x_1, \ldots, x_{\lambda(P)}>) = \top$ se $V(P(x_1,\ldots, x_{\lambda(P)})) \in \Delta$

$$P_{M^*}(<x_1, \ldots, x_{\lambda(P)}>) = \bot \text{ se } F(P(x_1,\ldots, x_{\lambda(P)})) \in \Delta$$

$$P_{M^*}(<x_1, \ldots, x_{\lambda(P)}>) = * \text{ in tutti gli altri casi.}$$

Sia l'assegnazione **s** la funzione identità, cioè $\mathbf{s}(x) = x$ per ogni $x \in$ Var. Per dimostrare (HS) si dimostra:

Sia φ una formula di $\mathcal{L}$; allora:

(1) $V(\varphi) \in \Delta \Rightarrow \mathbf{M^*}_s(\varphi) = \top$

(2) $F(\varphi) \in \Delta \Rightarrow \mathbf{M^*}_s(\varphi) = \bot$

(3) $I(\varphi) \in \Delta \Rightarrow \mathbf{M^*}_s(\varphi) = *$

(4) $N(\varphi) \in \Delta \Rightarrow \mathbf{M^*}_s(\varphi) \neq \bot$

Si noti però che, poiché Δ è un insieme analizzato, se $N(\varphi) \in \Delta$, allora o $V(\varphi) \in \Delta$ o $I(\varphi) \in \Delta$, cosicché (4) risulta dimostrato se lo sono (1)-(3). Si tratta dunque di dimostrare (1)-(3) per induzione sul grado di complessità di φ. La dimostrazione è lasciata al lettore.

(**) risulterebbe dimostrata se potessimo provare che c'è un tableau per Δ (che sappiamo non essere chiuso perché Δ è consistente) i cui rami non chiusi sono insiemi analizzati. Infatti, se ρ fosse uno di questi rami visto come insieme di formule segnate[8], risulterebbe soddisfacibile in virtù di (HS), e quindi anche Δ (che come nodo iniziale è anche in ρ) risulterebbe soddisfacibile.

Tableaux di questo genere (cioè tableaux i cui rami non chiusi sono insiemi analizzati) vengono chiamati **tableaux sistematici**, e la procedura per costruirli, nel caso della presente logica parziale, è esattamente analoga a quella del caso classico (si vedano le note sul *Metodo dei tableaux*, disponibili in rete); nel caso presente, si tratterebbe di 'ripetere' non solo '$V(\forall x\varphi)$', ma anche '$I(\forall x\varphi)$', che determina la possibilità di estendere all'infinito un ramo del tableau).

Diamo quindi per dimostrato il seguente teorema (per i cui dettagli rimandiamo al testo appena citato):

(IA) Se Δ è un insieme finito di formule segnate e $\mathcal{T}$ il tableau sistematico per Δ, allora ogni ramo non chiuso di $\mathcal{T}$ è un insieme analizzato.

Come si è detto, i teoremi (HS) e (IA) hanno come corollario (**), che ci dà la **completezza debole** (perché si assume che Δ sia finito). Ma la procedura di costruzione dei tableaux sistematici ci permette di ottenere il teorema di compattezza (si vedano, per i dettagli, le note citate prima):

(IC) Se tutti i sottoinsiemi finiti di un insieme Δ di formule segnate sono soddisfacibili, allora anche Δ è soddisfacibile.

Da (IC), che ha come corollario anche il teorema di Löwenheim-Skolem, si ottiene la completezza forte.

ESTENSIONI

(1) IDENTITÀ

$$\left.\begin{array}{cc} s(\varphi(t)) & s(\varphi(t)) \\ V(t = t') & V(t' = t) \\ | & | \\ s(\varphi(t')) & s(\varphi(t')) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{NUOVE REGOLE} \\ \\ \text{(dove s è un qualsiasi segno)} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} F(x = x) \\ I(x = x) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{NUOVE FORMULE CRITICHE} \\ \text{(dove } x \in \text{Var)} \end{array}$$

[8] In realtà i rami di un tableau sono insiemi di insiemi di formule.

(2) DESCRIZIONI (trattamento presupposizionale)[9]

$$
\begin{array}{c}
V(\psi^{\iota x\varphi/z}) \\
| \\
V(E!y\varphi) \\
V(\psi^{y/z})
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
F(\psi^{\iota x\varphi/z}) \\
| \\
V(E!y\varphi) \\
F(\psi^{y/z})
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{I(\psi^{\iota x\varphi/z})} \\
\swarrow & \searrow \\
V(E!y\varphi) & N(\neg E!y\varphi) \\
I(\psi^{y/z}) &
\end{array}
$$

dove $E!y\varphi =_{def} \varphi^{y/x} \wedge \forall x(\varphi \rightarrow x = y)$. Vale inoltre la restrizione che y non occorra libera nel ramo.

(3) INDIVIDUO “ESTERNO”: $\otimes$

$$
\left.
\begin{array}{c}
V(\varphi^{\otimes/z}) \\
| \\
V(\varphi^{y/z})
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
F(\varphi^{\otimes/z}) \\
| \\
F(\varphi^{y/z})
\end{array}
\right\}
\text{NUOVE REGOLE}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
V(t = t') \\
\\
F(t = t')
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l}
\text{NUOVE FORMULE CRITICHE} \\
\\
\text{(nel caso } \otimes \text{ sia t o t}')
\end{array}
$$

(Si ricordi che $\otimes \notin$ D e che vale l’ordine parziale dato da :

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dash] & y \arrow[d, dash] & z \arrow[dl, dash] \ldots\ldots. \\
& \otimes &
\end{tikzcd}
$$

Inoltre i predicati sono interpretati come funzioni parziali monotòne.)

(Si noti che nel caso la regola per la quantificazione universale venisse riformulata così:

$$
\begin{array}{l}
\forall x\varphi \\
| \\
\varphi^{t/x}
\end{array}
$$

dove ‘t’ è un termine, si dovrebbe escludere sia le descrizioni, sia la costante ‘$\otimes$’ dalla classe dei termini per i quali sta ‘t’.)

(4) DESCRIZIONI (trattamento proposto da Blamey,)

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{V(\psi^{\iota x\varphi/z})} \\
\swarrow & \searrow \\
V(E!y\varphi) & V(\psi^{\otimes/z}) \\
V(\psi^{y/z}) &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{F(\psi^{\iota x\varphi/z})} \\
\swarrow & \searrow \\
V(E!y\varphi) & F(\psi^{\otimes/z}) \\
F(\psi^{y/z}) &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{I(\psi^{\iota x\varphi/z})} \\
\swarrow & \searrow \\
V(E!y\varphi) & I(\psi^{\otimes/z}) \\
I(\psi^{y/z}) &
\end{array}
$$

[9] Si tratta di un approccio presupposizionale perché se le condizioni di esistenza ed unicità non vengono soddisfatte, l’enunciato con la descrizione non riceve un valore di verità. Si noti che questo trattamento è *monotòno* in questo senso:

$$\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N} \;\Rightarrow\; \mathbf{M}(\psi^{\iota x\varphi/z}) \leq \mathbf{N}(\psi^{\iota x\varphi/z})$$

Questo trattamento è non presupposizionale perché, quando esistenza ed unicità non sono soddisfatte, la descrizione '$\iota x\varphi$' denota $\otimes$, e di questo individuo può essere vero (o falso) che gode di ψ (data l'interpretazione dei predicati). Il problema è che un trattamento non-presupposizionale ha, di solito, la funzione di discriminare qualcosa di vero o di falso di $\iota x\varphi$ anche se $\iota x\varphi$ non esiste, senza che si tratti di proprietà banali (cioè godute, o non godute, da tutti gli individui). Così, per fare un esempio grossolano, si vorrebbe che un trattamento non presupposizionale permettesse di rendere conto della verità di 'il cavallo alato è un cavallo' senza banalizzare l'attribuzione di questa proprietà. Ma qui, dato che le funzioni che interpretano i predicati sono monotòne (e dato che, per ogni $u \in D$, $\otimes \leq u$), se è vero (o falso) che $\otimes$ gode di una certa proprietà, allora è vero (o falso) che ogni individuo del dominio gode di quella proprietà[10]. Nel nostro esempio: se il cavallo alato non esiste (e quindi la descrizione denota $\otimes$), allora che il cavallo alato sia un cavallo comporta che tutti gli individui sono cavalli. In conclusione, nel trattamento proposto da Blamey viene meno una delle ragioni addotte di solito per scegliere un trattamento non presupposizionale (e cioè la possibilità di fare asserzioni non triviali sui presunti 'non-esistenti').

[10] Si vedano le regole deduttive per l'individuo "esterno" al punto (3) più sopra.